Yaoundé, le 11 août 2020.

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 03 HEURES

EXERCICE 1 : (5 points)

1- On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que : 6u + 7v = 1. **0,25pt**

b) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E). **0,75pt**

2- Soit $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

On considère le plan P d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$. On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $(O\,; \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

a) Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels. **0,5pt**

b) Déterminer les coordonnées de ce point. **0,25pt**

3- On considère un point M du plan P dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a) Montrer que l'entier y est impair. **0,5pt**

b) On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel. Montrer que le reste de la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1. **0,75pt**

c) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$. **0,75pt**

d) En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1. **0,5pt**

e) En déduire les coordonnées de tous les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels. **0,75pt**

EXERCICE 2 : (05 POINTS)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On considère les points A $(3\,;\,1\,;\,0)$; B $(-1\,;\,1\,;0)$; C $(-1\,;2\,;-1)$ et D $(1\,;0\,;-2)$. (S) est la sphère de centre D et passant par A. (Q) est le plan d'équation $y + z + 2 = 0$.

1. a) Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan (P). **0,75pt**
1. b) Déterminer alors une équation cartésienne du plan (P). **0,75pt**
1. c) Montrer que ABCD est un tétraèdre. **0,5pt**
1. d) Calculer alors le volume du tétraèdre ABCD. **0,5pt**
1. e) En déduire la distance du point D au plan (P). **0,5pt**

2.a) Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S). **0,5pt**
2.b) Vérifier que les points B et C appartiennent à (S). **0,5pt**

3) Donner l'expression analytique de la réflexion de plan (Q). **1pt**

<u>PROBLEME :</u> (10 POINTS)

Partie A : **Étude d'une fonction auxiliaire g**

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty$ [par $g(x) = 2x^2 - (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)$.

1) Montrer que $g(x) = x^2\left[2 - \frac{x^2+1}{x^2}\right]\ln(x^2 + 1)$. **0,25pt**
2) Calculer alors la limite de g en $+\infty$. **0,5pt**
3) Montrer que pour tout réel x de $[0, +\infty[$, $g'(x) = 2x[1 - \ln(x^2 + 1)]$ **0,5pt**
4) Montrer que pour tout réel x de $[0, +\infty[$,
   $1 - \ln(x^2 + 1) \geq 0$ si et seulement si x appartient à $[0, \sqrt{e-1}]$,
   puis donner le sens de variation de la fonction g. **1pt**
5) Dresser le tableau des variations de la fonction g. **0,5pt**
6) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une notée α appartient à l'intervalle $[\sqrt{e-1}, +\infty[$. **0,75pt**
7) Montrer que $1 < \alpha < 2$, puis donner un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1. **0,75pt**
8) En déduire que pour x appartenant l'intervalle $[0, +\infty[$ $g(x) < 0$ si et seulement si x appartient à l'intervalle $]\alpha, +\infty[$. **0,5pt**

Partie B : **Étude de la fonction f :**

On considère la fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ lorsque $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. (C_f) est la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\|\vec{\jmath}\| = 4\|\vec{\imath}\| = 4$ cm.

1) Montrer que la fonction f est continue en zéro. **0,5pt**
2) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. En déduire que f est dérivable en 0. **0,75pt**
3) Vérifier que, pour x strictement positif, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$. **0,75pt**
4) Déduire de la partie A, le sens de variation de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. **0,5pt**
5) Montrer que, pour $x \geq 1$: $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2x^2)}{x}$. **0,75pt**
6) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. **0,5pt**
7) Dresser le tableau des variations de f. **0,5pt**
8) Tracer avec soin la courbe (C_f). On prendra $\alpha = 1,9$. **1pt**

Fin de l'épreuve.