Yaoundé, le 11 août 2020.

CONCOURS D'ADMISSION
SERIE D, E, F, GCE/AL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 03 HEURES

EXERCICE 1 : (5 points)

On considère l'équation différentielle (E) $y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$ où y désigne une fonction de la variable x définie et deux fois dérivable sur IR, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x$ est solution de l'équation différentielle (E). **1pt**
2. Résoudre dans IR l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. **1pt**
3. Déterminer une fonction Polynôme du second degré solution de (E). **1pt**
4. Déduire de 2. et de 3. l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E). **1pt**
5. Déterminer la solution h de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $h(0) = 0 \; et \; h(1) = e + \frac{3}{2}$. **1pt**

EXERCICE 2 : (05 POINTS)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A_0, A_1 et A_2 d'affixe respectives $z_0 = 5 - 4i$, $z_1 = -1 - 4i$ et $z_2 = -4 - i$. On considère la similitude directe S qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2

1. Vérifier que l'écriture complexe de la similitude S est : $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$. **1pt**
2. Déterminer le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de S. **0.75pt**
3. On considère un point M d'affixe $z \neq 0$ et son image M' d'affixe z'.
   a) Vérifier que : $\omega - z' = i(z - z')$. **0.5pt**
   b) Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$? Justifier votre réponse. **0.75pt**
4. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1} est défini par : $A_{n+1} = S(A_n)$ et on donne la suite (u_n) de termes positifs définie par $u_n = A_nA_{n+1}$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. **0.5pt**
   b) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Exprimer v_n en fonction de n. **1pt**
   c) La suite(v_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse. **0.5pt**

<u>PROBLEME :</u> (10 POINTS)

On considère les fonctions f, g et h définies sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1$ et $h(x) = x + \ln x$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 2 cm.

1.

a) Calculer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition. **1pt**

b) Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$

et que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$. **1pt**

c) En déduire le sens de variation de la fonction g, dresser le tableau des variations de g et déterminer le signe de $g(x)$. **1pt**

2.

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et à droite en 0. **0,5pt**

b) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout $x \in]0;+\infty[$, . $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$. **1pt**

c) Dresser le tableau des variations de f. **0,5pt**

3.

a) Étudier les variations de la fonction h et dresser son tableau des variations. **1pt**

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,4 ; 0,7]$. **0,5pt**

c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha$. **0,5pt**

4.

a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$. **0,5pt**

b) Étudier la position relative de la courbe (C_f) et de la droite (D). **0,5pt**

3.

a) Montrer que l'abscisse x_0 de tout point de (C_f) où la tangente est parallèle à l'asymptote (D) vérifie l'équation : $1 - x_0 - 2\ln x_0 = 0$. **0,5pt**

b) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1. **0,5pt**

c) Tracer (D) et (C_f). **1pt**

Fin de l'épreuve.